2025年度一般選抜（TEAPスコア利用方式） 記述式問題 解答例

科目：2月6日　TEAP数学（PM）

1 (2) $I_0(a) = -\dfrac{1}{a}(e^{-1}-1)$, $I_1(a) = \dfrac{1}{a^2}(2e^{-1}-1)$ (4) 0.061

不等式による被積分関数の評価を利用して、所望の精度で求めることを主題とした問題である。

(1) は、$\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k$ が等比数列であることから導くことができる。別解として、n に関する数学的帰納法の形で記述することもできる。

(2) は、定積分の計算である。$I_0(a)$ は、$e^0=1$ に注意すれば多項式の定積分である。$I_1(a)$ は、部分積分により計算できる。

(3) は、積分の絶対値に関する三角不等式を用いたあと、被積分関数の評価を利用して計算を進めればよい。例えば、$x \geqq 0$ から、$\dfrac{1}{1+x} \leqq 1$ と評価できる。さらに、a が正の実数であることに注意すると、$|e^{-ax}| \leqq 1$ と評価できる。これらから、

$$\left|\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{(-x)^n e^{-ax}}{1+x}dx\right| \leqq \int_0^{\frac{1}{a}} x^n dx$$

を得る。この右辺を計算すればよい。

(4) は、(1)、(2)、(3) をどのように利用するかに気がつければよい。(1) より、

$$F(a) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{1}{a}}(-x)^k e^{-ax}dx + \int_0^{\frac{1}{a}}\frac{(-x)^n e^{-ax}}{1+x}dx$$

と変形できる。$a=10$ において $n=2$ とすると、

$$F(10) = \sum_{k=0}^{1} I_k(10) + \int_0^{\frac{1}{10}}\frac{(-x)^2 e^{-10x}}{1+x}dx$$

であり、その右辺第二項の絶対値は (3) より $\dfrac{1}{3000}$ 以下となる。したがって，右辺の第一項と $F(10)$ の差は 0.001 未満である。右辺第一項は (2) の計算結果を用いることで計算できる。