2023年度一般選抜（学部学科試験・共通テスト併用方式）
記述式問題　解答例

学部：2月7日　理工学部 【学部共通試験　数学】

3

数式の散漫な羅列ではなく、論理が繋がっていて、文章として筋道立てて書けていることが評価の主眼となる。但し、数式には充分な表現力があるので、長々と文章で説明するのでなく、数式を用いて簡潔・的確に表現すべきであり、論理関係や文章の構造を示す「〜とおくと」「〜であるから」「したがって」などの文言があれば、多くの場合には充分である。

(1) は、単純に $\log x$ の定積分を計算すれば良い。値は $S_1 = 1$。

(2) は、示すべき命題が「$S_n = a_n e + b_n$（ただし $a_n,\ b_n$ はいずれも整数）と表せる」であることがポイントである。すなわち「所望の $a_n,\ b_n$ が存在すること」「$a_n,\ b_n$ が整数であること」の 2 点を明らかにする必要がある。部分積分によって得られる漸化式 $S_{n+1} = e - (n+1)S_n$ （計算の方法によっては $S_{n+1} = -nS_n + nS_{n-1}$） を利用して、$n$ に関する数学的帰納法（以下、単に「帰納法」と記す）で示すのが標準的だろう。

示すべき命題そのものを帰納法で示す場合には、出発点 $n = 1$ については、「$S_1 = 1 = 0 \cdot e + 1$ なので、$a_1 = 0,\ b_1 = 1$ とすれば良い。」などと書くのが本来であるが、ここは「(1) より」でも充分であろう。帰納法の仮定については、$n = k$ のとき、「$S_k = a_k e + b_k$（$a_k,\ b_k$ は整数）と表せるとすると、」あるいは「$S_k = a_k e + b_k$ を満たす整数 $a_k,\ b_k$ が存在するとすると、」ということになる。数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ が予め与えられているのではないので、単に「$S_k = a_k e + b_k$ が成り立つとすると、」と書いては難がある。また、ここで初めて $a_k,\ b_k$ が導入されたのであるから、$a_k,\ b_k$ の整数性をここに書いておくべき。結論部分は、$S_{k+1} = (1 - (k+1)a_k)e - (k+1)b_k$ まで示してから、例えば「帰納法の仮定より $a_k,\ b_k$ はともに整数であるから、$a_{k+1} = 1 - (k+1)a_k,\ b_{k+1} = -(k+1)b_k$ で $a_{k+1},\ b_{k+1}$ を定めれば、$a_{k+1},\ b_{k+1}$ はともに整数で、$S_{k+1} = a_{k+1}e + b_{k+1}$ を満たす。」とすればよかろう。（「定めれば」と書いたが、実は、$S_n = a_n e + b_n$ となる整数 $a_n,\ b_n$ は一意に定まる。しかし、それには e の無理数性が必要であり、その議論なしに、「$a_{k+1} = 1 - (k+1)a_k,\ b_{k+1} = -(k+1)b_k$ となる」と書くのはやや難がある。本問で問うている整数 $a_n,\ b_n$ の存在だけなら e の無理数性は不要なので、上記のような書き方が適切であろう。）

また、別の述べ方としては、(1) および漸化式から $a_1 = 0,\ b_1 = 1$ および $a_{n+1} = 1 - (n+1)a_n,\ b_{n+1} = -(n+1)b_n\ (n \geqq 1)$ で定まる数列 $\{a_n\},\ \{b_k\}$ を用いればよいことが推測できるので、この初項と漸化式で数列を予め定めておいて、この数列に関して「すべての自然数 n に対して、$a_n,\ b_n$ がともに整数で、$S_n = a_n e + b_n$ となる」ことを帰納法で示してもよい。（今度は既に数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ を与えたので、これについて「となる」という表現になる。）

どちらにせよ、一般に帰納法による証明に際して、帰納法の仮定を使う箇所は最も重要なポイントであるから明記すべきである。本問では $a_n,\ b_n$ が整数であることが眼目である（整数でなくてもよいなら $a_n = 0,\ b_n = S_n$ に取ればよいので、ほとんど何もする必要がない）から、証明中で整数性が適切に議論されていない場合は、証明すべきことの大部分が示せていないことになる。

漸化式あるいは部分積分を繰り返し用いて S_n を明示的に求めてしまうことも考えられるが、この場合は明示的に書き下した形が論拠になるので、例えば「$a_n = 1 - n + n(n-1) - \cdots$」で終わらさず、最後の項まで正確に書き下すことが必要である。ここで符号などの計算ミスがあれば欠陥の度合いは大きい。また、一般の n に対しては、「これを繰り返して」あるいは「$\cdots$」を用いて書くことになるが、本来はこれも帰納法に乗せるべきことである。

漸化式 $S_{n+1} = e - (n+1)S_n$ は一般の n に対して部分積分で直接に得られるので、ここを帰納法にする必要はない。また、帰納法で示している最中に漸化式を繰り返し用いて明示形を求めに行ってしまうのも首尾一貫していない。

尚、(1) および漸化式を導く計算では、始めから $y = \log x$ とおいて S_n を y に関する定積分に置換して、終始この形で考えるのも一法だろう。