2023年度一般選抜（TEAPスコア利用方式） 記述式問題 解答例

科目：2月3日　TEAP数学（PM）

$\boxed{\mathbf{3}}$　(2) (i)　$\boxed{\alpha}$　$\pi\sqrt{1+4a}$

$\boxed{\mathbf{4}}$

被積分関数の不定積分が明示的に求まらないような定積分の値の近似値を、不等式による被積分関数の評価を利用して、所望の精度で求めることを主題とした問題である。

微分・積分の計算自体は多項式と単純な指数関数だけであるので、数式の散漫な羅列ではなく、論理が繋がっているかどうか、文章として筋道立てて書けているかどうか、が評価の主眼となる。但し、数式には充分な表現力があるので、数式で表現できていることを長々と文章で説明する必要はなく、論理関係や文章の構造を示す「〜とおくと、」「〜であるから、」「したがって、」などの文言があれば、多くの場合には充分である。

(1) は、$e^x-(1+x)$, $(1+2x)-e^x$ が $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で 0 以上であることを、増減表を書いて値の変化を見ることで示せば良い。この範囲で、$e^x-(1+x)$ は単調増加であるが、$(1+2x)-e^x$ は単調増加でないことに注意が必要である。$y=1+x$, $y=e^x$, $y=1+2x$ のグラフの上下関係を見ることでもわかるが、$y=e^x$ のグラフが下に凸であることなど、その際に押さえるべきポイントを明記すべきである。どちらにしても $e<3$ であることが効いている。

(2) は、(1) の不等式の各辺を積分していけば得られるが、n に関する数学的帰納法の形で記述すれば明解だろう。$n=1$ の場合は (1) の不等式そのものである。

(3) は、(2) の不等式を利用する。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k!} \leqq f(x) \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k!}+\frac{x^{n-1}}{n!}$$

なので、各辺を 0 から 1 まで定積分すれば、求める定積分の値の評価

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot k!} \leqq \int_0^1 f(x)dx \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot k!}+\frac{1}{n\cdot n!}$$

を得る。積分値は幅 $\dfrac{1}{n\cdot n!}$ の区間に入っているので、誤差 10^{-3} 以下の近似値を得るには $\dfrac{1}{n\cdot n!} \leqq 10^{-3}$ となる n を用いて計算すればよい。このような最小の n は $n=6$ であるから、ここまで計算すれば誤差 10^{-3} 以下の近似値として 1.318 を得る。

尚、一般に近似値の計算においては、上で議論したような「打ち切り誤差」の他、各項の四捨五入による「丸め誤差」にも留意する必要がある。本問においては「打ち切り誤差」の評価が主眼であるので、「丸め誤差」についての議論は明記していなくても不問とするが、実際には、各項の値を小数第 4 位を四捨五入して小数第 3 位までの近似値にしてしまうと、誤差が積もって最終的な値の小数第 3 位がずれてしまう（可能性がある）。計算の途中の値は一桁長く取って、小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位までの近似値にして計算しておき、最後に小数第 4 位を四捨五入して小数第 3 位までの近似値にするのが標準的である。